ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS UTILIZADAS PARA RESOLUÇÃO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA ENVOLVENDO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO

Eliane Kiss de Souza – UFRGS

Resumo: O presente trabalho tem por objetivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos para resolução de situações-problema sobre raciocínio multiplicativo antes do ensino sistematizado de multiplicação e divisão no 3º ano do Ensino Fundamental, bem como as evoluções destas estratégias após formação continuada para professores. Tem-se como base teórica para esta análise esquemas de ação por correspondência um-para-muitos e por distribuição, referidos por autores como Vergnaud (1983, 1988, 1993 e 1994), Nunes e Bryant (1997), Park e Nunes (2001), Spinillo e Lautert (2006) e Nunes e colaboradores (2009). Para a análise proposta neste trabalho foi aplicado um pré-teste no início do ano letivo de 2011 para alunos do 3º ano do Ensino Fundamental, integrantes do grupo experimental e controle. Esse teste foi reaplicado no final do ano letivo como pós-teste após a participação dos professores em um programa de formação continuada e do ensino sistematizado de multiplicação e de divisão para os alunos. Os resultados evidenciam que, em geral, os alunos utilizam estratégias simples na resolução de situações-problema ao ingressarem no 3º ano, as quais evoluem mediante oferta de ensino sistematizado, por sua vez, desenvolvendo o raciocínio multiplicativo operatório.

Palavras-chave: correspondência um-para-muitos, distribuição, estratégias e raciocínio multiplicativo.

Introdução

Estudos apontam que as crianças começam a coordenar esquemas de ação por correspondência um-para-muitos e por distribuição em torno dos 5 e 6 anos (NUNES e BRYANT, 1997). Com base nos estudos analisados, determinou-se o seguinte objetivo para este trabalho: analisar as estratégias que os alunos criam para resolver situações-problema antes do ensino sistematizado de multiplicação e divisão iniciado no 3º ano do Ensino Fundamental, também as evoluções destas estratégias.

A abordagem sobre o raciocínio multiplicativo, neste trabalho, faz parte de um estudo que está sendo pesquisado em nível de doutorado abrangendo conceitos iniciais da matemática, formação continuada e desempenho dos alunos. A pesquisa envolve um programa de formação continuada para professores regentes do 3º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Novo Hamburgo, Rio Grande do Sul e aplicação de pré-teste e pós-teste aos alunos dos professores participantes da formação continuada. Dentre as questões do pré-teste e pós-teste aplicados constam duas situações-problema sobre raciocínio multiplicativo, as quais serão analisadas neste trabalho.

Para a análise das estratégias utilizadas pelos alunos e evoluções destas, resolução de situações-problema com raciocínio multiplicativo, apresenta-se argumentações teóricas sobre as relações numéricas estabelecidas em situações de raciocínio multiplicativo, relações a partir de esquemas de ação por correspondência um-para-muitos e distribuição, abordados por Nunes e Bryant (1997), Park e Nunes (2001), Spinillo e Lautert (2006) e Nunes e colaboradores (2009).

Aborda-se os resultados parciais e discussões com argumentações sobre a evolução das estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de situações-problema sobre raciocínio multiplicativo relacionadas à mobilização de conceitos mediante oferta de ensino sistematizado, o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo operatório, os obstáculos no processo de construção, erros construtivos como uma fonte de informações à realização de intervenções específicas.

Raciocínio multiplicativo

O raciocínio multiplicativo não se refere apenas ao raciocínio envolvido em situações de multiplicação, mas também de divisão, proporcionalidade e frações. Para Vergnaud (1983, 1988, 1993 e 1994) o campo das estruturas multiplicativas abrange tanto regras operatórias referentes à divisão, à multiplicação, como da combinação de ambas, as quais são desenvolvidas pela criança de forma gradual, associadas aos esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação.

Estudos realizados por Nunes & Bryant (1997) sobre raciocínio multiplicativo vêm mostrando que este exige operações complexas, porque há uma série de sentidos de números novos a serem aprendidos, como proporções, fatores escalares e funcionais. Isso significa que neste raciocínio estão envolvidos diferentes sentidos de números em três tipos de situações, sendo eles: de correspondência um-para-muitos; que envolvem relações entre variáveis; e que envolvem distribuição, divisão e divisão ao meio.

Para os autores, no primeiro tipo de situação de correspondência um-para-muitos em conjuntos descontínuos, para manter a diferença entre dois conjuntos, soma-se o mesmo número de objetos a cada conjunto, por isso contrasta com a adição. Nesta correspondência a base conceitual é a proporção, por exemplo, em uma situação-problema envolvendo as variáveis “uma moto” e “duas rodas”, cada vez que se acrescenta uma moto ao conjunto motos também se acrescenta duas rodas ao conjunto rodas. Assim, na situação de relações entre os conjuntos ocorre a replicação mediante a adição da unidade correspondente, sendo possível, também, a remoção desta unidade mantendo a proporção. Como a proporção permanece constante, no caso da moto e rodas (1:2), nesta situação tem-se um fator escalar que não está relacionado ao conjunto motos e rodas, nem ao número de objetos nestes dois conjuntos, mas ao número de replicações.

Na segunda situação sobre relações entre variáveis, (NUNES e BRYANT: 1997), consideram as variáveis contínuas, como meio quilo e dois reais. O preço por quilo é um sentido novo de número, referindo-se a frações de unidades de medidas. O sentido de número na relação entre variáveis é um fator, uma função ou uma quantidade intensiva.

A terceira situação envolve distribuição, divisão e divisões ao meio. A distribuição e a divisão constituem-se em relações parte-todo, com três elementos (o todo, as partes e o tamanho das partes ou quota) ocorrendo uma partição com distribuição equitativa. Já na divisão ao meio ocorre uma relação inversa entre números de receptores e o tamanho da quota por meio de uma série de divisões ou cortes sucessivos, resultando frações.

Estudos relativos às relações numéricas descritas mostram que as crianças são capazes de criar estratégias para resolver problemas envolvendo raciocínio multiplicativo muito antes de serem formalmente ensinadas na escola. Nunes e colaboradores (2009) afirmam que as crianças entre 5 a 7 anos sabem resolver problemas de multiplicação e divisão de modo prático, pois elas utilizam esquemas de ação por correspondência um-para-muitos e por distribuição equitativa para resolver situações-problemas que envolvem duas varáveis numa relação constante. Também, referem que situações-problema de forma prática deveriam integrar os conteúdos desde a 1ª série.

Quanto às melhores práticas no ensino da multiplicação, Park e Nunes (2001) contrastam duas hipóteses. A primeira sugere que o conceito de multiplicação é fundamentado no entendimento de adição repetida. A segunda propõe que adição repetida é apenas um procedimento de cálculo e que a compreensão da multiplicação tem a suas raízes no esquema de correspondência um-para-muitos. Diante de estudos realizados, os autores referem que a adição repetida não é a base para o ensino do conceito de multiplicação, afirmando que a origem do entendimento das crianças sobre as relações multiplicativas está no esquema de correspondência um-para-muitos. Portanto, embora a multiplicação seja compreendida como uma adição sucessiva de parcelas iguais pelo senso comum, ela envolve uma relação fixa entre os valores de duas variáveis (duas grandezas ou duas quantidades), por exemplo, em uma situação-problema envolvendo uma casa com três cachorros, tem-se a variável número de casas e a variável número de cachorros.

Estratégias em situações-problema

A palavra estratégia, de origem grega, na atualmente é usada em diversas áreas, dentre elas, na educacional. Não há uma uniformidade no sentido da palavra, em cada área o termo refere-se a situações muito diversas. Na língua grega antiga, *stratègós* (de *stratos*, "exército", e *ago*, "liderança" ou "comando") significava "a arte do general" e designava o comandante militar.

Neste trabalho, tem-se como definição da palavra estratégias o "conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a 'atacar' o problema ou a progredir no sentido de obter a sua solução" (PALHARES, 2004, p. 24). A palavra técnica, também, se origina do grego *techné*, cuja tradução é arte e possui diversas definições, sendo neste trabalho considerada como o conjunto de procedimentos que têm como objetivo obter um determinado resultado.

Se tratando de um estudo relacionado a conceitos iniciais da matemática, como estratégia será considerada, por exemplo, os traços como forma de representação que os alunos utilizam para anotar quantidades na resolução de uma situação-problema apresentada, bem como o modo como foi realizado.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, as crianças conquistam maior autonomia e desenvolvem estratégias mais elaboradas à medida que crescem. A evolução das estratégias, a partir do processo ensino-aprendizagem na escola, é possibilitada mediante reflexão dos procedimentos, argumentações sobre a melhor forma de organização, estabelecimento de novas relações e confronto dos registros, por parte do professor, para que o grupo possa conhecer diferentes estratégias, (BRASIL, 1998).

Na evolução das estratégias, os erros ou equívocos cometidos pelos alunos, isto é, os obstáculos no processo de construção permitem discutir a coerência da estratégia adotada, se ocorreu por simples distração ou dificuldade de raciocinar. Neste sentido, as estratégias são reveladores dos processos de raciocínio e das superações necessárias para a construção do conhecimento lógicomatemático, pois evidenciam a necessidade de retomada dos conceitos das operações fundamentais, regras algorítmicas e, principalmente, a interpretação das situações-problema, entre outras, (PIAGET, 1994 e LA TAILLE, 1997).

Para Davis e Espósito (1990), os tipos de erros cometidos devem ser distinguidos para uma análise e busca de superação. As autoras os classificam em três tipos: erros de procedimento, erros construtivos e erros por limites na estrutura do pensamento. Os erros de procedimento são cometidos por distração ou falta de treinamento. Os erros construtivos ocorrem porque a estrutura de pensamento que o aluno possui não é suficiente para a resolução da situação-problema, por dificuldades de compreensão dos dados, pois a estrutura do pensamento ainda não é suficiente para solucionar a situação-problema, a hipótese que a criança constrói não a permite compreender a questão posta e selecionar estratégias de ação. Os erros por limites na estrutura do pensamento são decorrentes da falta de estrutura cognitiva necessária à solução da tarefa, o que impossibilita a compreensão por parte da criança do que lhe é solicitado. Ela não seleciona estratégias para a resolução de uma situação-problema.

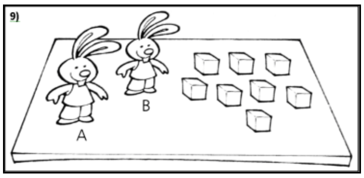
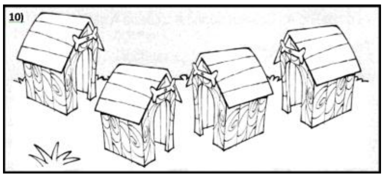
Diante de uma situação-problema sobre multiplicação e divisão o aluno escolhe uma determinada estratégia para resolvê-lo, a qual envolve dois aspectos, a compreensão do problema e os procedimentos para resolvê-lo. Portanto, as estratégias utilizadas, bem como os erros, evidenciam a necessidade ou não, por parte do professor, de refletir sobre os tipos de atividades desenvolvidas com os alunos e as metodologias empregadas, verificando se estas contribuem ou não para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Por isso, mediante a compreensão do erro construtivo, fonte de enriquecimento e possibilidade de avanço, o desafio está em como o professor pode ajudar os alunos a evoluírem em suas estratégias, superando seus obstáculos, ou seja, intervenções específicas.

Método da pesquisa

A seguir apresenta-se a trajetória percorrida para análise proposta neste trabalho. Foi realizada uma reunião aos professores regentes das turmas do 3º ano do Ensino Fundamental, nesta os professores foram convidados a participar de um programa de formação continuada envolvendo conceitos iniciais da matemática. Para o grupo experimental, composto pelos alunos dos 17 professores que aceitaram participar, e ao grupo controle foi aplicado um pré-teste no início do ano letivo de 2011. O teste é constituído de dez problemas, apresentados em forma de um bloco, contendo um problema por página, com desenhos para ajudar as crianças a entenderem a situação-problema. Duas questões, a nona e a décima, envolvem raciocínio multiplicativo, Quadro 1.

Quadro 1 - Questões do pré-teste/pós-teste sobre raciocínio multiplicativo - Adaptado de Nunes e colaboradores (2009)

Questões conforme bloco apresentado aos alunos	Situações-problema de cada questão apresentadas de forma oral aos alunos

	Em cima da mesa tem dois coelhos. Sua tarefa é distribuir os docinhos de forma que os dois recebam a mesma quantidade. Quantos docinhos recebeu cada coelho?
	Em cada casa moram três cachorros. Quantos cachorros, ao todo, moram nas quatro casas?

O teste foi aplicado pela pesquisadora aos alunos em sala de aula, em horário normal de aula. Após o programa de formação e o ensino sistematizado de multiplicação e divisão, no final do mesmo ano letivo foi aplicado um pós-teste, constituído pelas mesmas questões do pré-teste.

Apresentação dos resultados e análise das estratégias utilizadas

Pôde-se verificar pelo percentual de respostas corretas referente às situações que envolvem raciocínio multiplicativo, Quadro 2, que em torno de 80% dos alunos do grupo experimental coordenam esquemas de ação por correspondência um-para-muitos e distribuição antes do ensino sistematizado de multiplicação e divisão, evoluindo em média 8% após o ensino. Embora os grupos tenham apresentados resultados semelhantes em termos quantitativos, quanto às estratégias utilizadas o grupo experimental apresentou maiores evoluções após a formação para professores e o ensino sistematizado de multiplicação e divisão. Portanto, é um equivoco pensar que é somente na escola que as crianças aprendem a coordenar esquemas de ação, entretanto, na escola desenvolvem o raciocínio multiplicativo operatório.

Quadro 2 – Percentual de respostas corretas

Grupos	Raciocínio Multiplicativo	
	Pré-teste	Pós-teste
Experimental	81,1%	87,7%
Controle	69,6%	76,7%

No pré-teste as estratégias usadas pelos alunos na nona questão envolvendo distribuição foram: ligar, enumerar, agrupar e distribuir um-a-um. Em todas as turmas de ambos os grupos que foram aplicados o pré-teste as estratégias se repetiram. A diferença entre as estratégias mostra as evoluções em termo de coordenação dos esquemas, sendo a mais simples ligar, distribuindo um doce de cada vez, Figura 1a. Já ao enumerar, a evolução se dá no sentido do aluno não necessitar mais voltar-se aos coelhos ao distribuir os doces, Figura 1b. Nessa o aluno distribuiu as letras e contou o número de vezes que aparecem. Usando a estratégia de enumerar os alunos utilizaram, além das letras A e B, em alguns casos, algarismos 1 e 2. Ao agrupar a metade, o aluno não realizou a distribuiu termo-a-termo, levou em conta que a distribuição era para dois coelhos (divisão por 2) e separou a metade para cada um, mas no final ligou o resultado aos coelhos, Figura 1c. Outra estratégia constatado foi a marcação dos docinhos, seguido de distribuição um para "A" e um para "B", Figura 1d.

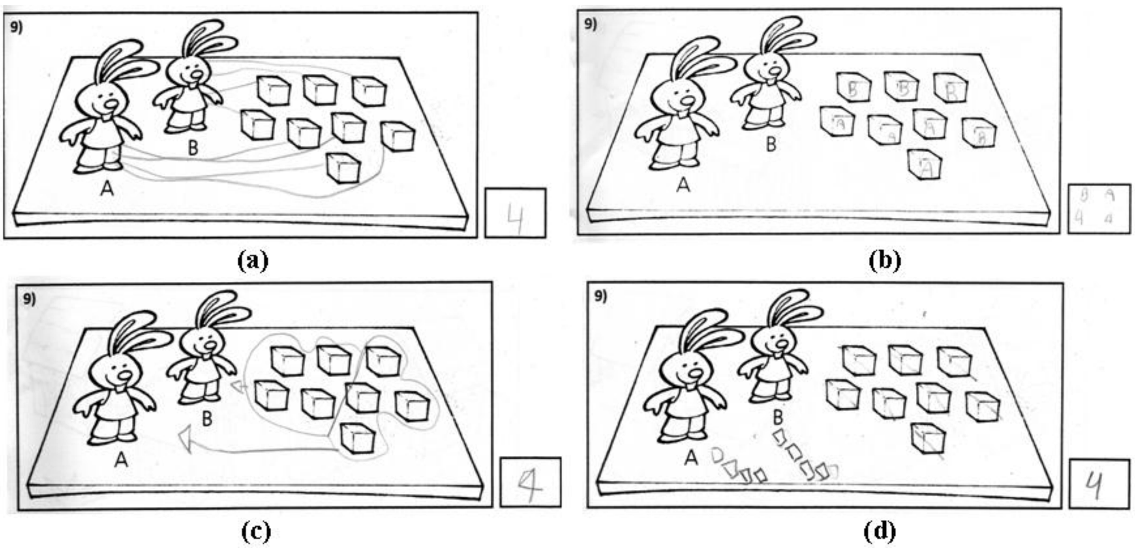


Figura 1 - Estratégias usadas na questão 9

Com estas estratégias empregadas os alunos demonstraram coordenar esquemas de ação por distribuição (NUNES e BRYANT, 1997; VERGNAUD, 1983, 1993) a partir dos conhecimentos prévios.

No pós-teste muitos alunos usaram as mesmas estratégias do pré-teste. A novidade foi o uso do cálculo escrito para o grupo experimental. Na Figura 2a, pode-se verificar que inicialmente o aluno começou ligando os docinhos aos coelhos, logo passou a fazer o cálculo com a distribuição nos conjuntos. Uma estratégia nova surgiu no pós-teste para o grupo experimental, o da distribuição de dois em dois, Figura 2b. Uma hipótese para esta estratégia é o ensino sistematizado da multiplicação por 2.

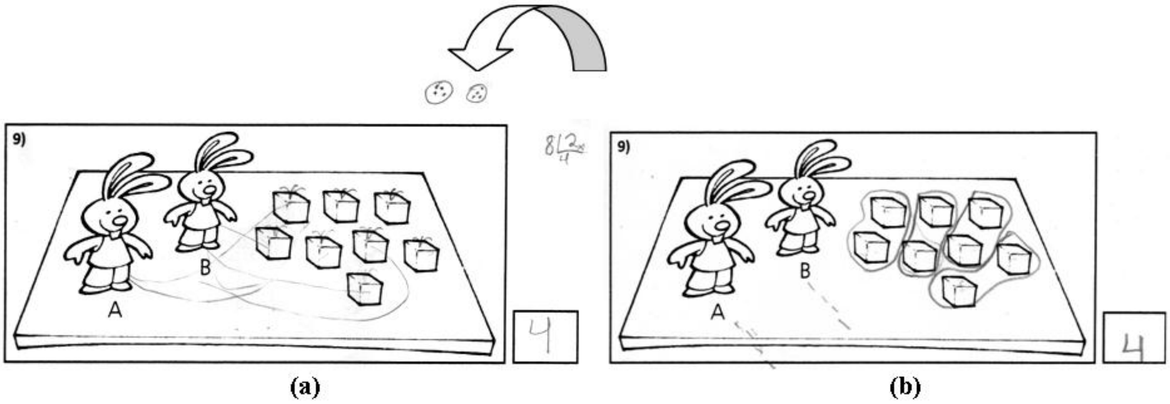
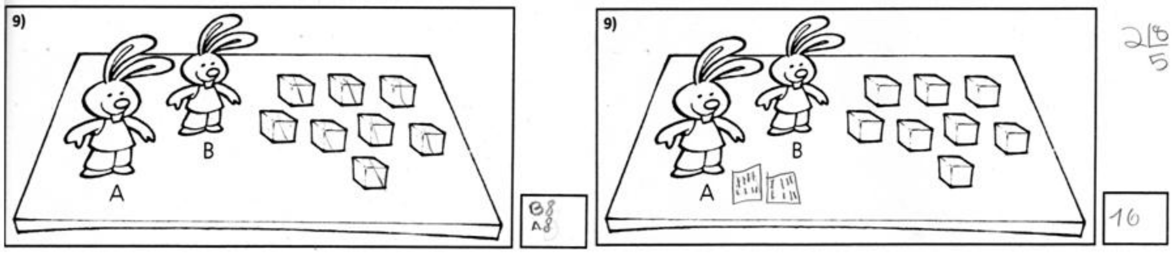


Figura 2 - Estratégias usadas na questão 9

Um obstáculo no processo de construção demonstrada pelos alunos foi quanto à forma de escrever a resposta no retângulo, pois eram dois coelhos e no bloco havia apenas um retângulo. A pesquisadora respondeu que poderiam fazer da forma como achavam que deveria ser, então partiram o retângulo ao meio escrevendo para A “4” e para B “4”. Em relação ao pré-teste, no pós-teste um menor número de alunos partiu o retângulo ao meio, escrevendo a resposta para A e para B. Esse tipo de resposta mostra que o aluno não estabelece relações parte-todo envolvido em distribuição e divisão, pois nestas relações, de acordo com Nunes e Bryant (1997) é preciso considerar três elementos, 8 doces (o todo), 2 coelhos para partilhá-los (duas partes) e 4 doces para cada coelho (o tamanho das partes ou quota).

Outra situação que cabe destacar sobre as relações entre o todo, as partes e o tamanho das partes refere-se à partição de cada doce ao meio para a realização da distribuição, Figura 3a. Embora a pesquisadora tenha explicado nas instruções que os coelhos deveriam receber os docinhos inteiros, alguns alunos partiram os doces ao meio, dando a metade para cada um, desta forma, somando as metades e na resposta escrevem 16, Figura 3b. Para estes alunos os dois coelhos juntos receberam 16 metades. Na figura 3b, pode-se verificar que o aluno tentou fazer cálculo escrito, mas não conseguiu realizar a operação, então partiu os doces ao meio. Nesta estratégia usada verifica-se que às relações em distribuição foram além da operação de divisão com coordenação de esquema de ação por distribuição equitativa. Os alunos realizaram cortes sucessivos, pois para eles tanto faz se cada coelho recebe 8 metades ou 4 inteiros, pois vão receber a mesma quantia. De acordo com Nunes e Bryant (1997) os cortes sucessivos mostram uma progressão, estão relacionados ao surgimento de novas relações e sentidos como proporção de transformação, as frações. Quanto à representação do cálculo escrito e a estratégia utilizada pelo aluno, na Figura 3b tem-se um exemplo de erro construtivo (DAVIS e ESPÓSITO, 1990).



(a) (b)

Figura 3 - Estratégias usadas na questão 9

Para Davis e Espósito (1990) e Nunes e colaboradores (2009) respostas como “8 metades para cada um”, considerados pelo senso comum como erros absurdos, são estratégias que servem para o professor avaliar o desenvolvimento conceitual do aluno e realizar intervenção.

Na décima questão sobre multiplicação, no pré-teste, os alunos utilizaram estratégias de representação com desenhos de palitinhos embaixo das casas ou espalhados no bloco em grupos de três, Figura 4. Também foi utilizada por alguns alunos a estratégia de contar nos dedos e desenhar os cachorros nas casas. Nestas estratégias, a partir de estudos realizados por Nunes e Bryant (1997), pode-se inferir que os alunos coordenaram esquemas de ação por correspondência um-para-muitos, por replicações, somando em cada conjunto a unidade correspondente.

Muitos alunos ao somar as unidades correspondentes, contaram um elemento a mais, encontrando como resultado “13”. A causa mais provável é devido à contagem utilizando os dedos das mãos, pois estas têm apenas dez e desta forma ocorreu erros procedimentais. Nestes casos, frente a estes obstáculos, Davis e Espósito (1990), os consideram erros de procedimento cometidos por distração ou falta de treinamento.

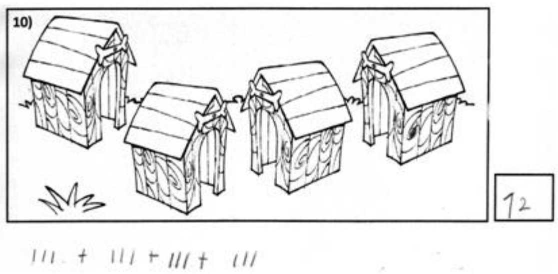


Figura 4 - Exemplo de estratégia usada na questão 10

Na décima questão do pós-teste, muitos alunos continuaram utilizando desenhos de palitinhos ou cachorros como no pré-teste, Figura 5a, mas em número reduzido, se comparado ao pré-teste. Os alunos passaram a substituir os desenhos pelo algarismo 3, Figura 5b. A estratégia do uso do algarismo levou alguns alunos a cometerem erros em relação ao número de replicações (fator escalar), pois acabaram colocando um “3” a mais ou a menos no cálculo escrito (3+3+3) ou (3+3+3+3+3). Para Nunes e Bryant (1997), replicar difere de juntar, pois ao replicar deve-se manter uma proporção, para a qual se faz necessário compreender a relação entre os elementos casa e número de cachorros. Park e Nunes (2001) pontuam que a melhor forma de ensinar a multiplicação é por correspondência um-para-muitos.

Muitos alunos passaram a representar a replica com fator escalar, tudo indica que foi a forma como o cálculo escrito de multiplicação foi “ensinado” na escola, destaca-se que esta representação não ocorreu no pré-teste, Figura 5c. No grupo controle não ocorreu nenhuma representação com cálculo de multiplicação e divisão. O único cálculo escrito foi realizado com adição, expresso da seguinte forma “3+3= 6”, e o aluno deixou evidências que após o cálculo ele somou 6 com 6 e encontrou a resposta 12.

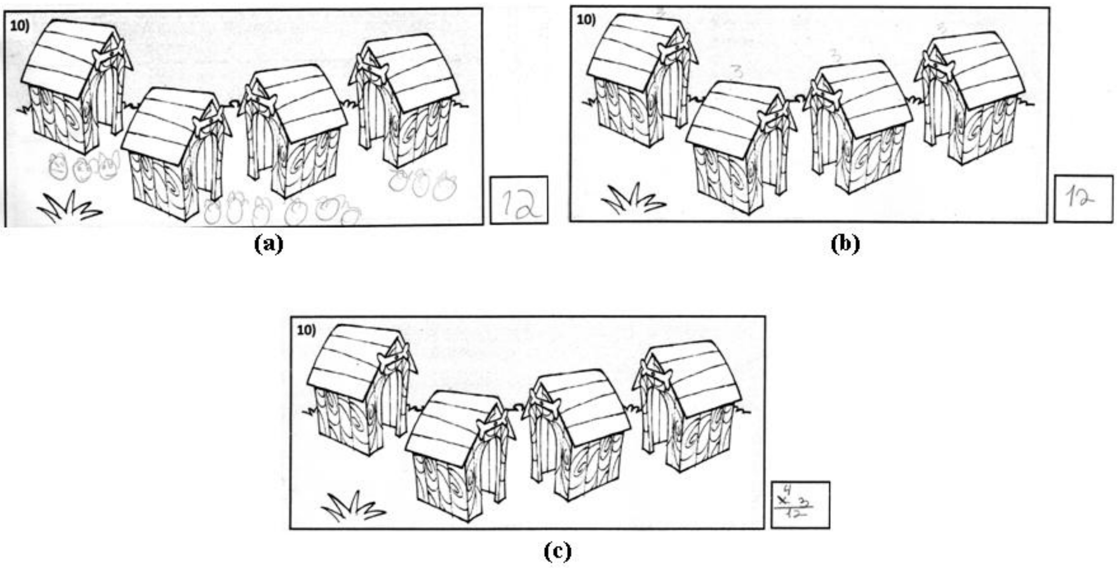


Figura 5 - Exemplo de estratégia usada na questão 10

Outro obstáculo apresentado pelos alunos no processo de construção foi relativo à escrita, trocando a ordem dos algarismos 1 e 2 (12/21), o aluno sabe que o resultado é doze, pois escreveu “3” no telhado de cada casa, Figura 6. Esta forma de representação não está relacionada à estrutura do raciocínio multiplicativo, mas à incompreensão da estrutura do sistema de numeração. Para Davis e Espósito (1990), por ser um erro construtivo, ele é uma fonte de informação ao professor, pois a partir desta fonte podem-se proporcionar situações para que o aluno possa construir novas estruturas cognitivas referentes à composição aditiva.

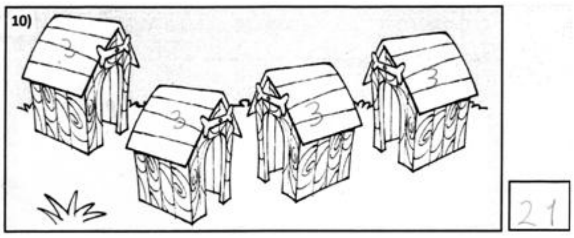


Figura 6 - Exemplo de estratégia usada na questão 10

Os alunos tanto do grupo experimental como do grupo controle que apresentaram obstáculos por limites na estrutura do pensamento, não conseguiram escolher uma estratégia para resolver as questões propostas. As respostas da nona questão de divisão foram X, números como 7, 2, 8, 24, entre outras. A resposta “2” acredita-se que deve ser devido à quantidade de coelhos e a resposta “8” a quantidade de doces. Na décima questão, de multiplicação, as respostas foram X, 2, 3, 4, entre outras. Acredita-se que a resposta “3” refere-se à quantidade de cachorros em cada casa e a resposta “4” a quantidade de casas. Os professores, destes alunos, informaram que os obstáculos apresentados eram oriundos das deficiências dos alunos portadores de necessidades especiais, considerados “alunos de inclusão”.

Considerações finais

Os alunos utilizam estratégias simples para resolver situações-problema com raciocínio multiplicativo com conceitos complexos envolvendo multiplicação e divisão antes de serem ensinados na escola. Antes da formação dos professores e do ensino sistematizado de multiplicação e divisão, os alunos utilizaram estratégias como de ligar, enumerar e agrupar para a divisão, já para a multiplicação os alunos usaram a adição repetida com representação de desenhos. Estas estratégias de resoluções são criadas pela coordenação de dois esquemas de ação, um-para-muitos e distribuição, desenvolvidos em diversas experiências em diferentes contextos sociais.

Os resultados evidenciam que na escola os alunos podem aprendem à operacionalização da multiplicação e divisão, passando a representar suas estratégias pelo cálculo escrito. Isto ocorreu com o grupo experimental, o que possibilita referir que a formação continuada sobre o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo influenciou na evolução das estratégias dos alunos, pois no grupo controle as estratégias utilizadas no pós-teste continuaram as mesmas do pré-teste. Desta forma, pode-se inferir que, na escola, a interação entre as estratégias que o aluno possui e o novo conhecimento a construir, modificam o prévio e adquirem novos significados, dependendo da ação pedagógica. Assim, antes do ensino sistematizado da multiplicação e divisão se faz necessário identificar as estratégias sobre as quais os alunos apóiam-se para aprender.

O desafio aos professores está em identificar as estratégias utilizadas pelos alunos e os obstáculos no processo de construção ao se depararem com situações-problema, para então fazer intervenções de forma a ajudar os alunos a entenderem conceitos e evoluírem em suas estratégias. Todavia, uma intervenção com este objetivo exige escolhas de situações-problema de multiplicação e divisão que proporcionem para os alunos oportunidades para compreensão das diferentes relações numéricas, bem como, reflexões com troca de idéias e argumentações, diante obstáculos surgidos, comparações entre as estratégias utilizadas e registros realizados.

Referências Bibliográficas

BRASIL. **Referencial Curricular Nacional para a educação Infantil/Conhecimento de Mundo**. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF, Vol. 3, 1998.

DAVIS, Cláudia; ESPOSITO, Yara Lúcia. **Papel e função do erro na avaliação escolar.** Cadernos de Pesquisa, São Paulo, SP, n. 74, p. 71-75, 1990.

LA TAILLE, Yves de. **O erro na perspectiva piagetiana**. In: AQUINO, J. G. (Org.) Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: SUMMUS, 1997, p. 25-45.

NUNES, Teresinha e BRYANT, Peter. **Crianças Fazendo Matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES Terezinha; CAMPOS Tânia; MAGINA Sandra e BRYANT Peter. **Educação Matemática: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez Editora, 2009.

PALHARES, Pedro (org). **Elementos de Matemática para professores do ensino básico.** Lisboa: Lidel, 2004.

PARK, Jee-Hyun e NUNES, Teresinha**. The development of the concept of multiplication**. Volume 16, Vol. 3, Jul-Set, 2001, pp. 763-773.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 12 ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1994.

SPINILLO, Alina Galvão e LAUTERT, Síntria Labres. **O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática.** In MEIRA, L. L.; SPINILLO, A. G. Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006, p. 46-79.

VERGNAUD, Gérard. **Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press Inc. pp. 127-174, 1983.

______ Multiplicative structures. In Hiebert, H. and Behr, M. (Eds.). Research

Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades.

Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 141-161, 1988.

______. **Teoria dos campos conceituais**. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. pp. 1-26, 1993.

______ **Multiplicative conceptual field: what and why?** In Guershon, H. and Confrey, (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics.

Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59, 1994.